

А.Е. Колесов, М.Н. Захарова
СВФУ им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С ПРИМЕНЕНИЕМ УРАВНЕНИЯ ДАРСИ-ФОРХГЕЙМЕРА

Аннотация. В работе рассматривается моделирование течения газа в пористой среде, описываемое уравнениями Дарси и Дарси-Форхгеймера. Математическое моделирование течения флюидов в пористых средах является важнейшим элементом в понимании процессов при добыче нефти и газа, оно применяется при выборе оптимального варианта разработки нефтяных и газовых месторождений. Основным законом фильтрации для моделирования течения жидкости является линейное уравнение Дарси. Однако, известно, что при высоких скоростях фильтрации данное уравнение не выполняется из-за проявления инерционных сил. В задачах нелинейной фильтрации наиболее точно движение жидкости и газа описывается двучленным законом Дарси-Форхгеймера.

Целью работы является исследование нелинейного закона фильтрации по Дарси-Форхгеймеру в призабойной зоне газовой скважины. В ходе исследований был сделан сравнительный анализ применения законов Дарси и Дарси-Форхгеймера. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи: изучить математические модели процесса фильтрации газа, провести моделирование призабойной зоны газовой скважины, провести сравнение законов Дарси и Дарси-Форхгеймера.

Для получения наглядных результатов применяется математическое моделирование. Для численного решения дифференциальных уравнений используется метод конечных элементов. Программная реализация проводится на вычислительном пакете FEniCS, позволяющем упростить решения уравнений методом конечных элементов.

В результате сделан вывод, что при использовании закона Дарси мы получаем завышенные значения дебита газовых скважин газопроводов, а используя закон Дарси-Форхгеймера можно получить данные близкие к реальным значениям дебита. Моделирование показало, что использование закона Дарси-Форхгеймера применимо для задач фильтрации в реальных условиях.

Ключевые слова: математическое моделирование, газовая скважина, законы фильтрации жидкостей и газов, закон Дарси, закон Дарси-Форхгеймера, анализ разработки, течение в пористых средах, призабойная зона, метод конечных элементов, FEniCS.

A.E. Kolesov, M.N. Zakharova
M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia

GAS FLOW SIMULATION USING THE DARCY-FORCHHEIMER EQUATION

Abstract. We discuss the modeling of gas flow in the reservoir, described by the equations of Darcy and Darcy-Forchheimer. Mathematical modeling of fluid flow in porous media is the most crucial element in understanding the processes in oil and gas production; it is used when choosing the optimal option for developing oil and gas fields. The primary filtration law is the linear Darcy equation. However, it is known that this equation is not fulfilled at high filtration velocities due to the manifestation of inertial forces. In problems of nonlinear filtration, the motion of liquid and gas is most accurately described by the two-term Darcy-Forchheimer law.

The work aimed at studying the nonlinear law of Darcy-Forchheimer filtration in the bottom-hole zone of a gas well. In the course of the research, we performed a comparative analysis of the application of Darcy and

КОЛЕСОВ Александр Егорович – к.ф.-м.н., доцент Геологоразведочного факультетата СВФУ им. М.К. Аммосова. E-mail: ae.kolesov@s-vfu.ru

KOLESOV Alexander Egorovich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Faculty of Geology and Survey, M.K. Ammosov North-Eastern Federal University. E-mail: ae.kolesov@s-vfu.ru

ЗАХАРОВА Мария Николаевна – ст. преп. Геологоразведочного факультетата СВФУ им. М.К. Аммосова. E-mail: zaharova.mn@s-vfu.ru

ZAKHAROVA Maria Nikolaevna – Senior Lecturer, Faculty of Geology and Survey, M.K. Ammosov North-Eastern Federal University. E-mail: zaharova.mn@s-vfu.ru

Darcy-Forchheimer equations. To achieve this goal, we formulated the following tasks: to study the filtration process's mathematical models, simulate the bottom-hole zone of a gas well, and compare the laws of Darcy and Darcy-Forchheimer.

To obtain visual results, we used mathematical modeling. For the numerical solution of differential equations, we used the finite element method. The software implementation was carried out on the FEniCS computational package, which simplifies the solution of equations by the finite element method.

We conclude that we got overestimated flow rates of gas wells when using the Darcy law, and using the Darcy-Forchheimer law, we were able to get data close to the actual flow rates. The simulations showed that the use of the Darcy-Forchheimer law is applicable for modeling gas filtration in actual conditions.

Keywords: mathematical modeling, gas well, laws of filtration of liquids and gases, Darcy law, Darcy-Forchheimer law, development analysis, flow in porous media, bottom-hole zone, finite element method, FEniCS.

Введение

Течение флюидов в пористых средах является важнейшим элементом в понимании процессов при добыче нефти и газа, а также в области гидрологии пластовых вод, защиты окружающей среды и многих других [1].

Правильное описание свойств флюидов и их движения в пласте необходимо для решения задач проектирования систем разработки месторождений. Данная задача требует использование математических моделей, корректно описывающих течение жидкости и газа при реальных пластовых условиях. Математическое моделирование часто применяется при выборе оптимального варианта разработки нефтяных и газовых месторождений. Моделирование помогает испытывать разные технологии добычи углеводородов, найти наилучшие варианты схем расположения скважин, определить изменения физических параметров нефти и газа [2].

Основным законом фильтрации жидкостей и газов в пористой среде служит закон Дарси, он выражает зависимость скорости фильтрации флюида от градиента давления. Проверке и исследованию пределов применимости закона Дарси посвящено много научных работ, в процессе этих исследований выявлены две основные группы: верхним пределом применимости является проявление инерционных сил при высоких скоростях фильтрации; нижним пределом – проявление не-newтоновских реологических свойств жидкости, ее взаимодействием с пористой средой при малых скоростях фильтрации [3]. Для облегчения обработки результатов множества экспериментов В.Н. Щелкачев предложил использовать безразмерный параметр, введение этого параметра упрощает исследование границ применимости закона фильтрации.

В задачах нелинейной фильтрации различают два случая: при больших и малых скоростях. При больших скоростях, когда существенна инерционная составляющая, используется формула Дарси-Форхгеймера, в составе которой учитывается квадратичная по скорости сила, описывающая сопротивление пористого скелета при относительно больших числах Рейнольдса на уровне пор [3].

Вопросу математического моделирования течения жидкости и газов в пористой среде посвящено множество работ [2, 4-6]. В работе [7] для численного решения задачи течения жидкости по закону Дарси-Форхгеймера используется метод конечных элементов. В [8] исследуется влияние инерционной составляющей Форхгеймера на продуктивность газовой скважины.

Целью работы является исследование нелинейного закона фильтрации по Форхгеймеру. Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи: изучить математическую модель процесса фильтрации, провести моделирование призабойной зоны газовой скважины, провести сравнение законов Дарси и Форхгеймера.

Постановка задачи

Рассматривается нелинейное течение газа в призабойной зоне газовой скважины. В качестве газа выбран метан для упрощения исходных данных. Схема расчетной области Ω представлена на рисунке 1. Граница расчетной области состоит из 2 частей: Γ_1 – граница пласта, Γ_2 – скважина. На рисунке R_k – радиус пласта, r_c – радиус скважины.

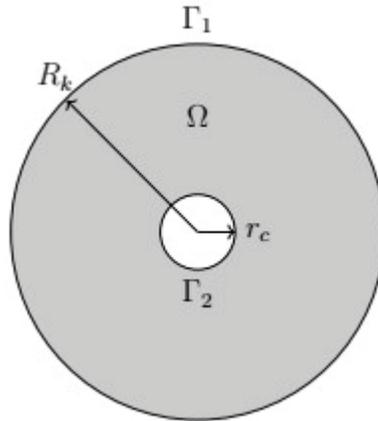


Рисунок 1 – Расчетная область

Основным уравнением неустановившегося течения жидкостей и газов в пористой среде является уравнение неразрывности [4]:

$$\frac{\partial \varphi \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (1)$$

где φ – коэффициент пористости среды, ρ – плотность, \mathbf{u} – скорость фильтрации. Зависимость плотности газа от давления p описывается уравнением состояния:

$$\rho = \frac{pW}{zRT}. \quad (2)$$

Здесь, W – молекулярный вес газа, R – универсальная газовая постоянная, T – температура, z – коэффициент сверхсжимаемости, который определяется по формуле Платонова-Гуревича:

$$z = (0.4 \lg T_{\text{пр}} + 0.73)^{p_{\text{пр}}} + 0.1 p_{\text{пр}},$$

где $T_{\text{пр}}$, $p_{\text{кр}}$ – приведенные температура и давление газа, характеризующие отношения температуры T и давления p на критические температуру $T_{\text{кр}}$ и давление $p_{\text{кр}}$, соответственно:

$$T_{\text{пр}} = \frac{T}{T_{\text{кр}}}, \quad p_{\text{пр}} = \frac{p}{p_{\text{кр}}}.$$

Поставим уравнение (2) в (1) и получим уравнение неустановившегося течения газа в изотропной пористой среде:

$$\varphi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{z} \right) = \nabla \cdot \left(\frac{p \mathbf{u}}{z} \right), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Уравнение (3) дополняется законом сохранения импульса в форме закона Дарси:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

где k – проницаемость среды, μ – вязкость газа. Известно, что в случае течения газа при высоких градиентах давления закон Дарси не выполняется и следует использовать закон Дарси-Форхгеймера:

$$\frac{\mu}{k} \mathbf{u} + \beta \rho |\mathbf{u}| \mathbf{u} = -\nabla p, \quad x \in \Omega, \quad (5)$$

где β – коэффициент Форхгеймера, характеризующий инерционные силы. Коэффициент β определяется экспериментально. Для данного расчета будем использовать эмпирическую формулу [9]

$$\beta = \frac{4.8 \cdot 10^{12}}{k^{1.176}}.$$

Здесь, проницаемость k задается в миллидарси (мД), коэффициент β получается в 1/м.

Для решения систем уравнений (3), (4) течения газа по закону Дарси и (3), (5) – по закону Дарси-Форхгеймера необходимо задать граничные и начальные условия. На границе пласта Γ_1 ставим условие непротекания:

$$\mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad (6)$$

где \mathbf{n} – внешняя нормаль к границе. На границе скважины Γ_2 ставим постоянное забойное давление p_w :

$$p(x) = p_w, \quad x \in \Gamma_2. \quad (7)$$

Начальное условие для давления:

$$p(x) = p_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (8)$$

где p_0 – начальное пластовое давление.

Для численного решения рассматриваемых задач для течения по закону Дарси (3), (4), (6)-(8) и течения по закону Дарси-Форхгеймера (3), (5)-(8) необходимо получить дискретные задачи. Для аппроксимации по пространству будем использовать метод конечных элементов. Для этого нужно определить вариационные формулировки уравнений, построить расчетную сетку и аппроксимировать поля скоростей фильтрации и давления полиномами Лагранжа. Для аппроксимации по времени используем стандартный метод конечных разностей и неявную схему [10]. В рамках данной работы порядок дискретизации не будет рассматриваться. Подробнее про численное решение задач фильтрации можно посмотреть, например в [6].

Для программной реализации используется вычислительный пакет FEniCS, который позволяет автоматизировать численное решение дифференциальных уравнений с помощью метода конечных элементов на языке программирования python [11]. Ключевым преимуществом FEniCS является возможность записать вариационные формулировки решаемых задач в явном виде на встроенном языке ufl. Дискретизация задач будет проводится автоматически. Для решения полученных дискретных задач в FEniCS на основе различных библиотек реализованы множество решателей.

Результаты экспериментов

Рассматривается модельная задача с радиусом пласта $R_k = 1000$ м и радиусом скважины $r_c = 0,1$ м. Для расчета построим треугольную сетку с локальным сгущением в области скважины с 16900 ячейками. Геометрическая область и сетка были построены с помощью программы gmsh. Шаг по времени берем 1 день, время исследования принимаем 30 дней.

Свойства пласта и газа представлены в таблице 1 и в таблице 2. Для упрощения расчетов мы использовали известные значения свойств метана [12].

Для численного решения нелинейных уравнений используем метод Ньютона. Для решения систем дискретных задач, образованных в результате аппроксимации уравнений, используем прямой метод LU-разложения.

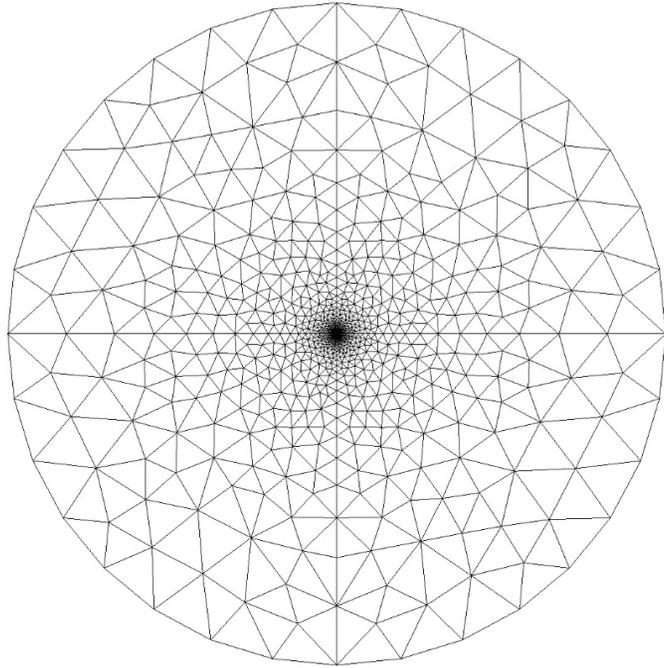


Рисунок 2 – Расчетная сетка

Таблица 1 – Свойства пласта

Свойство	Обозначение	Значение	Размерность
Проницаемость	k	0.4	Д
Пористость	m	0.2	-
Начальное пластовое давление	p_0	10	МПа
Забойное давление	p_w	9	МПа
Пластовая температура	T	315	К

Таблица 2 – Свойства метана

Свойство	Обозначение	Значение	Размерность
Плотность	ρ	0,657	кг/м ³
Динамическая вязкость	μ	11.2	мкПа · с
Критическая температура	T_{cr}	206.3	К
Критическое давление	p_{cr}	4.72	МПа

Результаты расчетов представлены на рис. 3 и 4, где представлены сравнения среднего пластового давления и дебита газовой скважины по времени при использовании уравнений Дарси (красная сплошная линия) и Дарси-Форхгеймера (синяя пунктирная линия). Видно, что при использовании уравнения Дарси пластовое давление падает намного быстрее, чем при использовании уравнения Дарси-Форхгеймера. Также, в начале расчет дебит скважины при использовании уравнения Дарси значительно превышает дебит скважины при использовании Дарси-Форхгеймера. Причем, в конце расчета дебиты становятся практически одинаковыми, так как уменьшается скорость фильтрации и уменьшается влияние инерционных сил.

На рис. 5 представлено распределение давления в пласте в конце расчета при использовании уравнений Дарси (красная сплошная линия) и Дарси-Форхгеймера (синяя пунктирная линия). Видно, что при использовании уравнения Дарси давление в пласте будет меньше.

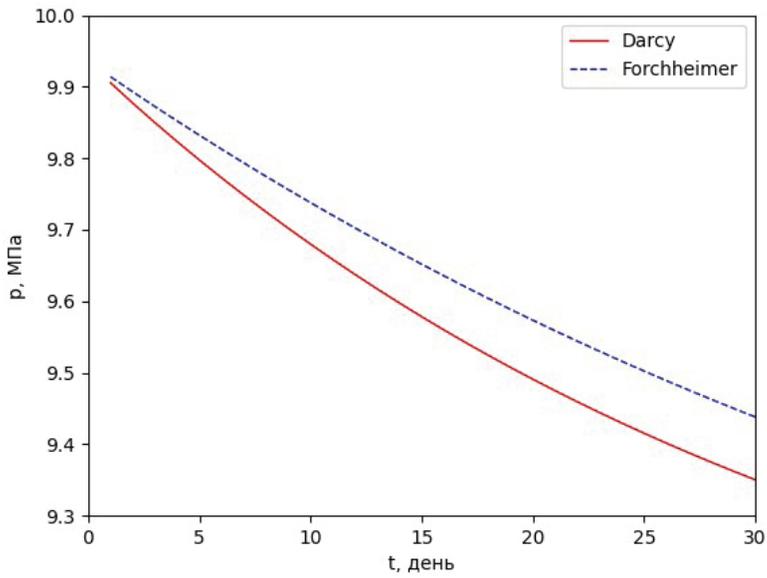


Рисунок 3 – Пластовое давление в зависимости от времени

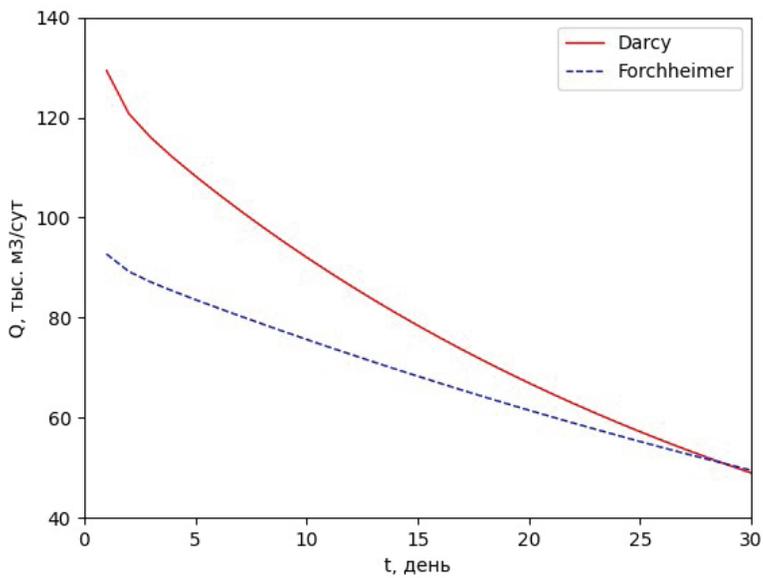


Рисунок 4 – Дебит газовой скважины в зависимости от времени

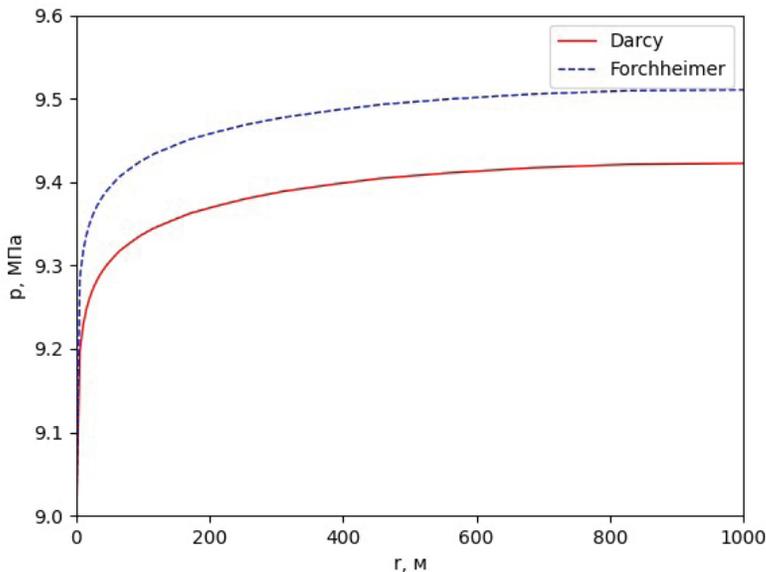


Рисунок 5 – Распределение давления по радиусу пласта

Заключение

В результате исследования стало очевидно, что при использовании уравнения Дарси мы получаем завышенные значения дебита газовых скважин и заниженные значения пластового давления по сравнению с результатами, полученными при использовании уравнения Дарси-Форхгеймера. Данное обстоятельство может быть опасно при использовании моделирования для проектирования разработки газовых месторождений и выбора оптимального режима разработки. Поэтому при моделировании фильтрации газа в реальных условиях рекомендуется использовать уравнение Дарси-Форхгеймера.

Литература

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: учебник для вузов. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
2. Каневская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – 128 с.
3. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. – М.: МАКС Пресс, 2017. – 88 с.
4. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 407 с.
5. Chen Z., Huan G., Ma. Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. – Philadelphia: SIAM, 2006. – 549 p.
6. Афанасьева Н.М., Колесов А.Е. Математическое моделирование задач фильтрации. – Якутск: Издательский дом СВФУ, 2019. – 120 с.
7. Girault V., Wheeler M. F. Numerical discretization of a Darcy-Forchheimer model // Numerische Mathematik. – 2008. – Vol 110, No 2. – P.161–198.
8. Zeng F., Zhao G. Gas well production analysis with non-Darcy flow and real-gas PVT behavior // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2007. – Vol. 59, No 3–4. – P. 169–182.
9. Pascal H., Quillian R.G., Kingston J. Analysis of Vertical Fracture Length and Non-Darcy Flow Coefficient Using Variable Rate Tests // Paper SPE 9438 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – Dallas, September 21-24, 1980.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Аддитивные схемы для задач математической физики. – М.: Наука, 2001. – 312 с.

11. Alnæs M. S., Blechta J., Hake J., Johansson A. et al. The FEniCS Project Version 1.5 // Archive of Numerical Software. – 2015. – Vol. 3, No. 100. – P. 9–23.

12. Лихачев Е.Р. Критические параметры газ / Е.Р. Лихачев // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 94-98.

References

1. Basniev K.S., Kochina I.N., Maksimov V.M. Podzemnaja gidromekhanika: uchebnik dlja vuzov. – M.: Nedra, 1993. – 416 s.

2. Kanevskaja R.D. Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamicheskikh processov razrabotki mestorozhdenij uglevodorodov. – M.-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij, 2003. – 128 s.

3. Leont'ev N.E. Osnovy teorii fil'tracii. – M.: MAKS Press, 2017. – 88 s.

4. Aziz H., Settari Je. Matematicheskoe modelirovanie plastovyh sistem. – M: Nedra, 1982. – 407 s.

5. Chen Z., Huan G., Ma. Y. Computational methods for multiphase flows in porous media. – Philadelphia: SIAM, 2006. – 549 p.

6. Afanas'eva N.M., Kolesov A.E. Matematicheskoe modelirovanie zadach fil'tracii. – Jakutsk: Izdatel'skij dom SVFU, 2019. – 120 s.

7. Girault V., Wheeler M. F. Numerical discretization of a Darcy-Forchheimer model // Numerische Mathematik. – 2008. – Vol 110, No 2. – P.161–198.

8. Zeng F., Zhao G. Gas well production analysis with non-Darcy flow and real-gas PVT behavior // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2007. – Vol. 59, No 3–4. – P. 169–182.

9. Pascal H., Quillian R.G., Kingston J. Analysis of Vertical Fracture Length and Non-Darcy Flow Coefficient Using Variable Rate Tests // Paper SPE 9438 presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – Dallas, September 21-24, 1980.

10. Samarskij A.A., Vabishhevich P.N. Additivnye shemy dlja zadach matematicheskoy fiziki. – M.: Nauka, 2001. – 312 s.

11. Alnæs M. S., Blechta J., Hake J., Johansson A. et al. The FEniCS Project Version 1.5 // Archive of Numerical Software. – 2015. – Vol. 3, No. 100. – P. 9–23.

12. Lihachev E.R. Kriticheskie parametry gaz / E.R. Lihachev // Vestnik VGU. Serija: Fizika. Matematika. – 2013. – № 1. – S. 94-98.